

Ivan Živić

# STATISTIČKA MEHANIKA



20/06/2016 15:52

Prirodno-matematički fakultet  
Univerzitet u Kragujevcu

Ivan Živić

# STATISTIČKA MEHANIKA



Kragujevac, 2006. godine

---

Odlukom Naučno-nastavnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Kragujevcu, broj 70/XII-1 od 27.02.2006. godine, odobreno da se štampa kao udžbenik za studente fizike ovog fakulteta.

---

*Izdavač:*

Prirodno-matematički fakultet, Radoja Domanovića 12, 34000 Kragujevac

*Za Izdavača:*

Prof. dr Srećko Trifunović, dekan

*Recenzenti:*

Dr Sava Milošević, redovni profesor Fizičkog fakulteta u Beogradu

Dr Sunčica Elezović-Hadžić, vanredni profesor Fizičkog fakulteta u Beogradu

ISBN 86-81829-68-8

© Prirodno-matematički fakultet, Kragujevac

CIP - Katalogizacija u publikaciji  
Narodna biblioteka Srbije, Beograd

51-72:53(075.8)

**ŽIVIĆ, Ivan**

Statistička mehanika / Ivan Živić. -  
Kragujevac : Prirodno-matematički fakultet,  
2006 (Kragujevac : Skver). - II, 190 str.  
: graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 200. - Bibliografija: str. 189-190.

ISBN 86-81829-68-8

a) Matematička fizika

COBISS.SR-ID 130139916

---

*Štampa:* Skver, Kragujevac

Tiraž: 200 primeraka • april 2006.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Principi klasične statističke mehanike</b>	<b>1</b>
1.1	Predmet proučavanja statističke mehanike . . . . .	1
1.2	Fazni prostor . . . . .	2
1.3	Mikrostanje sistema . . . . .	4
1.4	Statistički ansambl sistema . . . . .	8
1.5	Funkcija raspodele . . . . .	9
1.6	Srednje vrednosti fizičkih veličina . . . . .	10
1.7	Liouville-ova teorema . . . . .	11
1.8	Statistička definicija entropije . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Mikrokanonski ansambl</b>	<b>17</b>
2.1	Postulat o jednakim verovatnoćama . . . . .	17
2.2	Gustina stanja . . . . .	19
2.3	Funkcija raspodele u klasičnom limitu . . . . .	21
2.4	Entropija . . . . .	24
2.5	Normalni sistemi . . . . .	24
2.6	Statistička definicija temperature . . . . .	26
2.7	Pritisak sistema . . . . .	30
2.8	Klasičan idealni gas . . . . .	34
2.9	Gibbs-ov paradoks . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Kanonski ansambl</b>	<b>41</b>
3.1	Gibbs-ova teorema o kanonskoj raspodeli . . . . .	41
3.2	Statistička suma . . . . .	44
3.2.1	Neinteragujući sistemi čestica . . . . .	46
3.2.2	Interagujući sistemi čestica – konfiguracioni integral	48
3.3	Termodinamika kanonskog ansambla . . . . .	49
3.4	Klasičan realni gas . . . . .	50
3.5	Fluktuacije energije . . . . .	55
3.6	Maxwell-ova raspodela . . . . .	58

3.7	Dvočestična korelaciona funkcija . . . . .	60
3.8	Teorema o jednakoj raspodeli energije . . . . .	64
3.9	Teorema o viralu . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Veliki kanonski ansambl</b>	<b>71</b>
4.1	Gibbs-ova teorema o velikoj kanonskoj raspodeli . . . . .	71
4.2	Velika statistička suma . . . . .	74
4.3	Termodinamika velikog kanonskog ansambla . . . . .	75
4.4	Fluktuacije broja čestica . . . . .	78
4.5	Fluktuacije energije . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Formulacija kvantnih statistika</b>	<b>85</b>
5.1	Granice važenja klasične statističke mehanike . . . . .	85
5.2	Formalizam kvantne mehanike . . . . .	87
5.2.1	Prostor stanja . . . . .	87
5.2.2	Opservable . . . . .	87
5.2.3	Reprezentacije . . . . .	88
5.2.4	Verovatnoće rezultata merenja . . . . .	90
5.2.5	Promena stanja sa vremenom . . . . .	91
5.2.6	Identične čestice . . . . .	92
5.3	Mešana stanja . . . . .	94
5.3.1	Statistički operator . . . . .	94
5.3.2	Jednačina kretanja . . . . .	96
5.3.3	Energetska reprezentacija – matrica gustine . . . . .	98
5.3.4	Srednje vrednosti opservabli . . . . .	99
5.3.5	Operator entropije . . . . .	100
5.4	Ansambl kvantnih sistema . . . . .	101
5.4.1	Mikrokanonski ansambl . . . . .	101
5.4.2	Kanonski ansambl . . . . .	103
5.4.3	Veliki kanonski ansambl . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Sistem nezavisnih čestica</b>	<b>109</b>
6.1	Sistem Boltzmann-ovih čestica . . . . .	110
6.2	Sistem identičnih bozona . . . . .	113
6.3	Sistem identičnih fermiona . . . . .	116
6.4	Statistika brojeva popunjenosti . . . . .	119
6.4.1	Raspodela verovatnoće po brojevima popunjenosti . . . . .	120
6.4.2	Srednje vrednosti brojeva popunjenosti . . . . .	122
6.4.3	Fluktuacije brojeva popunjenosti . . . . .	125

<b>7</b>	<b>Kvantni idealni gas</b>	<b>127</b>
7.1	Svojstveni problem slobodne čestice . . . . .	127
7.2	Idealni gas bozona . . . . .	130
7.2.1	Bose-Einstein-ove funkcije . . . . .	130
7.2.2	Osnovne termodinamičke jednačine . . . . .	132
7.2.3	Idealni gas bozona na visokim temperaturama . . .	134
7.2.4	Bose-Einstein-ova kondenzacija . . . . .	137
7.2.5	Idealni gas bozona na niskim temperaturama . . .	142
7.3	Idealni gas fermiona . . . . .	146
7.3.1	Fermi-Dirac-ove funkcije . . . . .	146
7.3.2	Osnovne termodinamičke jednačine . . . . .	149
7.3.3	Idealni gas fermiona na visokim temperaturama . . .	151
7.3.4	Fermi-eva temperatura i Fermi-eva energija . . . . .	153
7.3.5	Idealni gas fermiona na niskim temperaturama . . .	156
<b>8</b>	<b>Elementi fizičke kinetike</b>	<b>161</b>
8.1	Jednočestični fazni prostor . . . . .	162
8.2	Master jednačina . . . . .	163
8.3	Fokker-Planck-ova jednačina . . . . .	170
8.4	Boltzmann-ova kinetička jednačina . . . . .	172
8.5	$H$ -teorema . . . . .	178
8.6	Lokalno ravnotežna Maxwell-ova raspodela . . . . .	180
8.7	Ireverzibilnost makroskopskih procesa . . . . .	184
	<b>Literatura</b>	<b>189</b>

### 7.3.4 Fermi-eva temperatura i Fermi-eva energija

Odredimo najpre ponašanje hemijskog potencijala  $\mu$  na niskim temperaturama. Podjimo od jednačine (7.94). Pošto je u ovoj oblasti  $z \gg 1$ , funkciju  $G_{\frac{3}{2}}^-(z)$  možemo razviti u red po formuli (7.85), zaustavljajući se na prvom korekcionom članu

$$\begin{aligned} \frac{N}{V} &= \frac{g}{\lambda_T^3} \frac{(\ln z)^{3/2}}{\Gamma(\frac{5}{2})} \left( 1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{(\ln z)^2} + \dots \right) \\ &= \frac{4\pi g}{3} \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} (kT \ln z)^{3/2} \left( 1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{(\ln z)^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (7.106)$$

U limesu  $z \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow 0$ ) korekcionni član jednak je nuli, tako da možemo naći vrednost hemijskog potencijala na nultoj temperaturi

$$\mu_0 = kT \ln z = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3N}{4\pi g V} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (7.107)$$

Da bi odredili zavisnost  $\mu(T) = kT \ln z$  na temperaturama različitim od nule  $0 < T \ll \infty$ , napišimo (7.106) u obliku

$$1 = \left( \frac{\mu(T)}{\mu_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu(T)} \right)^2 + \dots \right). \quad (7.108)$$

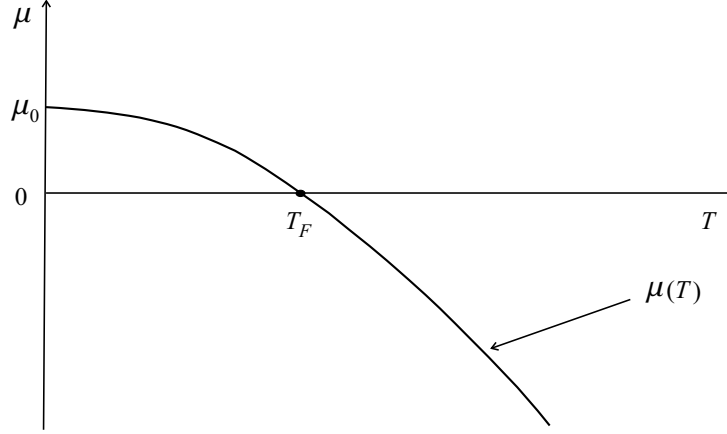
U korekcionom članu možemo staviti  $\mu(T) \simeq \mu_0$ , a potom poslednji izraz prepisati u obliku

$$\mu(T) = \mu_0 \left( 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right)^{-2/3}. \quad (7.109)$$

Pošto u niskotemperaturskoj oblasti  $kT \ll \mu_0$ , izraz u zagradi možemo aproksimirati po formuli  $(1+x)^{-2/3} \approx 1 - \frac{2}{3}x$ , sledi

$$\mu(T) = \mu_0 \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right), \quad (7.110)$$

odakle vidimo da je hemijski potencijal na niskim temperaturama pozitivna veličina koja opada sa porastom temperature. Pošto se na jako visokim temperaturama Fermi-Dirac-ove i Bose-Einstein-ove funkcije ponašaju na isti način  $G_n^-(z) \simeq G_n^+(z) \simeq z$  možemo zaključiti da će se i hemijski potencijali ponašati na isti način, tj. po formuli (7.58) koju smo izveli za bozon-ski sistem, i po kojoj je  $\mu$  u ovoj oblasti negativna veličina. To znači da na



Slika 7.7: Zavisnost hemijskog potencijala idealnog gasa fermiona od temperature. U blizini apsolutne nule hemijski potencijal je pozitivan i ponaša se u skladu s formulom (7.110), na Fermi-evoj temperaturi je  $\mu(T_F) = 0$ , a iznad  $T_F$  hemijski potencijal je negativan i u asimptotskoj oblasti  $T \rightarrow \infty$  ponaša se po zakonu (7.58).

nekoj konačnoj temperaturi  $T_F$  koja se zove *Fermi-eva temperatura*, hemijski potencijal mora biti jednak nuli  $\mu(T_F) = 0$  (Slika 7.7). Iz poslednjeg obrasca nalazimo

$$T_F = \frac{\sqrt{12}}{\pi} \frac{\mu_0}{k} \approx \frac{\mu_0}{k}, \quad (7.111)$$

pa se Fermi-eva temperatura obično definiše odnosom  $\mu_0 = kT_F$ . Dajmo još da na osnovu veze izmedju hemijskog potencijala i fugaciteta  $z = e^{\mu(T)/kT}$ , a na bazi ustanovljene zavisnosti  $\mu(T)$ , možemo zaključiti da je  $z(T_F) = 1$  i da u graničnim slučajevima važi:  $z \rightarrow \infty$  kada  $T \rightarrow 0$ , odnosno  $z \rightarrow 0$  kada  $T \rightarrow \infty$ .

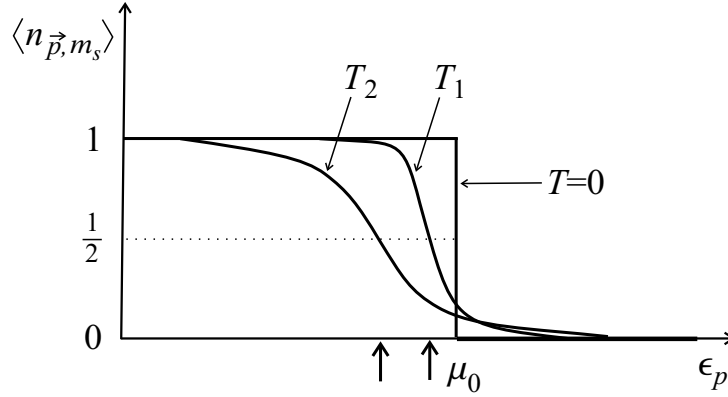
Razmotrimo sada srednje vrednosti brojeva popunjenosti kvantnih stanja na temperaturama  $T \ll T_F$ . Imajući u vidu da je kvantno stanje fermiona određeno impulsom  $\vec{p}$  i projekcijom spina  $m_s$ , na osnovu formule (6.60) imamo

$$\langle n_{\vec{p}, m_s} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu(T))} + 1}, \quad (7.112)$$

gde se  $\mu(T)$  ponaša po formuli (7.110). Analizirajmo najpre slučaj  $T = 0$  kada je  $\mu_0 = \mu(0)$ , odakle sledi

$$\langle n_{\vec{p}, m_s} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu_0)} + 1}. \quad (7.113)$$

Iz dobijene formule vidimo da u limesu  $T \rightarrow 0$  ( $\beta \rightarrow \infty$ ) postoji sledeća



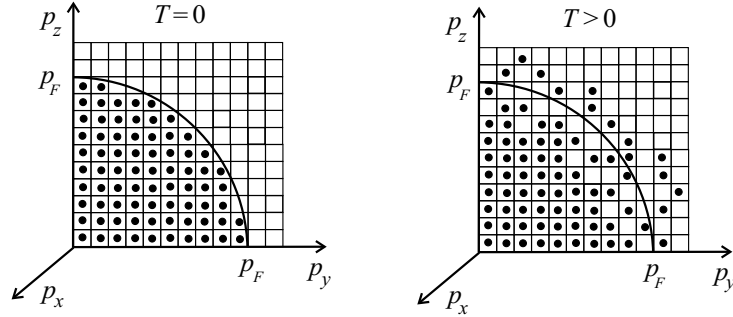
Slika 7.8: Srednje vrednosti brojeva popunjenosti jednočestičnih kvantnih stanja idealnog gasa fermiona na različitim temperaturama. Na  $T = 0$  stanja sa energijama ispod Fermi-evog nivoa  $\mu_0 = \mu(0)$  su popunjena a ona iznad prazna. Na temperaturama iznad nule  $0 < T_1 < T_2$  dolazi do prelaska čestica sa nižih na više energetske nivoe. Strelice na energetskoj osi označavaju vrednosti hemijskih potencijala na tim temperaturama:  $\mu(T_1) > \mu(T_2)$ . Iz formule (7.112) sledi da za proizvoljno  $T > 0$  stanja sa energijom  $\varepsilon_p = \mu(T)$  imaju popunjenost  $\langle n_{\vec{p}, m_s} \rangle = 1/2$ .

raspodela fermiona po kvantnim stanjima

$$\langle n_{\vec{p}, m_s} \rangle = \begin{cases} 1 & \varepsilon_p < \mu_0 \\ 0 & \varepsilon_p > \mu_0 \end{cases} \quad (7.114)$$

Dakle nivoi čija je energija manja od  $\mu_0$  su popunjeni, a nivoi sa energijom iznad  $\mu_0$  nepopunjeni (Slika 7.8). Ova raspodela odgovara tzv. potpuno degenerisanom gasu fermiona, jer se sve čestice poštujući Pauli-ev princip nalaze u jednočestičnim stanjima sa najnižom energijom. Inače za fermionski gas kažemo da je degenerisan ako se nalazi na temperaturama koje su znatno ispod Fermi-eve, pa se  $T_F$  naziva i temperatura degeneracije. Iz poslednje formule vidimo da energija koja odgovara popunjenom nivou sa najvećom energijom iznosi  $\varepsilon_F = \mu_0$  i zove se *Fermi-eva energija*. U impulsnom prostoru energija  $\varepsilon_F$  određuje Fermi-evu sferu sa poluprečnikom  $p_F = \sqrt{2m\mu_0} = h \left( \frac{3N}{4\pi gV} \right)^{\frac{1}{3}}$  unutar koje se nalaze vrhovi vektora koji određuju popunjena kvantna stanja (Slika 7.9). U sistemu koji sadrži  $N$  fermiona ispod Fermi-evog nivoa nalazi se tačno  $N$  popunjenih kvantnih stanja, tako da osnovnom stanju (stanje na  $T = 0$ ) odgovara energija

$$E_0 = \sum_{|\vec{p}| < p_F} \sum_{m_s = -s}^s \varepsilon_p = \frac{gV}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} 4\pi p^2 dp = \frac{2\pi gV}{5mh^3} p_F^5 = \frac{3}{5} N \varepsilon_F. \quad (7.115)$$



Slika 7.9: Shematski prikaz popunjenosti kvantnih stanja u impulsnom prostoru. Crtež levo prikazuje slučaj  $T = 0$  kada su sva stanja unutar Fermi-eve sfere popunjena, a ona van nje prazna. Na  $T > 0$  fermioni koji leže ispod Fermi-eve sfere prelaze u stanja iznad Fermi-eve sfere.

Na temperaturama različitim od nule srednje vrednosti brojeva popunjenosti računamo po formuli (7.112), odakle vidimo da će fermioni sa nivoa čija je energija ispod  $\varepsilon_F$  prelaziti na nivoe čija je energija iznad  $\varepsilon_F$ . Drugim rečima, nivoi ispod Fermi-evog počeeće da se “prazne”, a oni iznad počeeće da se “pune”, i to tako što će fermioni sa nivoa koji su neposredno ispod  $\varepsilon_F$ , prelaziti na nivoe koji su neposredno iznad  $\varepsilon_F$ .

### 7.3.5 Idealni gas fermiona na niskim temperaturama

Na proizvoljnoj temperaturi jednačinu stanja možemo, na osnovu formula (7.93) i (7.94), da izrazimo u implicitnom obliku

$$P = \frac{NkT}{V} \left( \frac{G_{\frac{5}{2}}^-(z)}{G_{\frac{3}{2}}^-(z)} \right). \quad (7.116)$$

U niskotemperaturskoj oblasti na osnovu formule (7.85) važi

$$G_{\frac{5}{2}}^-(z) = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (\ln z)^{5/2} \left( 1 + \frac{5\pi^2}{8} \frac{1}{(\ln z)^2} + \dots \right), \quad (7.117)$$

$$G_{\frac{3}{2}}^-(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2} \left( 1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{(\ln z)^2} + \dots \right), \quad (7.118)$$

pa je

$$P = \frac{2}{5} \frac{N}{V} kT \ln z \left( 1 + \frac{5\pi^2}{8} \frac{1}{(\ln z)^2} + \dots \right) \left( 1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{(\ln z)^2} + \dots \right)^{-1}. \quad (7.119)$$

# Literatura

- [1] Feldman Y. *Statistical Mechanics*, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem 1997 (<http://www.aph.huji.ac.il/feldman/statistical.htm>).
- [2] Feynman R. *Statistical Mechanics: A set of Lectures*, W. A. Benjamin, New York 1972.
- [3] Gibbs J.W. *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, Dover Publication, New York 1960 (Reprint of original 1902. edition).
- [4] Herbut F. *Kvantna mehanika za istraživače*, Prirodno-matematički Fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 1984.
- [5] Hill T.L. *Statistical Mechanics: Principles and Selected Applications*, McGraw-Hill, New York 1956.
- [6] Huang K. *Statistical mechanics*, 2nd ed. John Wiley, New York 1987.
- [7] Huang K. *Introduction to Statistical Physics*, Taylor & Francis, London 2001.
- [8] Isihara A. *Statistical Physics*, Academic Press, New York – London 1971.
- [9] Kubo R. *Statistical Mechanics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1968.
- [10] Landau L.D. and Lifshitz E.M. *Statistical Physics*, Addison-Wesley 1969.
- [11] Milić B. *Statistička Fizika*, Naučna Knjiga, Beograd 1970.
- [12] Milić B., Milošević S. i Dobrosavljević Lj. *Zbirka Zadataka iz Teorijske Fizike III deo: Statistička Fizika*, Naučna Knjiga, Beograd 1979.

- 
- [13] Milošević S. *Osnovi Fenomenološke Termodinamike*, Privredno-Finansijski Vodič, Beograd 1979.
  - [14] Mušicki Dj. *Uvod u Teorijsku Fiziku II – Statistička Fizika*, Prirodno-matematički Fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 1984.
  - [15] Nattermann T. *Statistische Physik*, University of Cologne, Köln 1999 ([http://www.thp.uni-koeln.de/natter/data/stat\\_pdf.zip](http://www.thp.uni-koeln.de/natter/data/stat_pdf.zip)).
  - [16] Pathria R.K. *Statistical Mechanics*, 2nd ed. Butterworth-Heinemann, Oxford 1996.
  - [17] Reichl L. *A Modern Course in Statistical Physics*, 2nd ed. J. Wiley and Sons, New York 1998.
  - [18] Reif F. *Statistical Physics, Berkeley Physics Course, V5*, McGraw-Hill, New York 1965.
  - [19] Rumer Yu.B. and Ryvkin M.Sh. *Thermodynamics, Statistical Physics and Kinetics*, Mir Publishers, Moscow 1980.
  - [20] Stanley H.E. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford 1971.
  - [21] Tošić B. *Statistička Fizika*, Institut za Fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, Novi Sad 1978.