Ivan Živić

STATISTIČKA MEHANIKA

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
1972
КРАГУЈЕВАЦ

Prirodno-matematički fakultet

Univerzitet u Kragujevcu

Ivan Živić

STATISTIČKA MEHANIKA

Kragujevac, 2006. godine

Odlukom Naučno-nastavnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Kragujevcu, broj 70/XII-1 od 27.02.2006. godine, odobreno da se štampa kao udžbenik za studente fizike ovog fakulteta.

Izdavač:
Prirodno-matematički fakultet, Radoja Domanovića 12, 34000 Kragujevac

Za Izdavača:
Prof. dr Srećko Trifunović, dekan

Recenzenti:
Dr Sava Milošević, redovni profesor Fizičkog fakulteta u Beogradu
Dr Sunčica Elezović–Hadžić, vanredni profesor Fizičkog fakulteta u Beogradu

ISBN 86-81829-68-8

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Narodna biblioteka Srbije, Beograd

51-72:53(075.8)

ŽIVIĆ, Ivan
Statistička mehanika / Ivan Živić. - Kragujevac : Prirodno-matematički fakultet, 2006 (Kragujevac : Skver). - II, 190 str. : graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 200. - Bibliografija: str. 189-190.

ISBN 86-81829-68-8

a) Matematička fizika
COBISS.SR-ID 130139916

Štampa: Skver, Kragujevac
Tiraž: 200 primeraka • april 2006.

Sadržaj

7.3.4 Fermi-eva temperatura i Fermi-eva energija

Odredimo najpre ponašanje hemijskog potencijala μ na niskim temperaturama. Podjimo od jednačine (7.94). Pošto je u ovoj oblasti $z \gg 1$, funkciju $G^{-}_{\frac{3}{2}}(z)$ možemo razviti u red po formuli (7.85), zaustavljajući se na prvom korekcionom članu

$$\begin{aligned} \frac{N}{V} &= \frac{g}{\lambda_T^3} \frac{(\ln z)^{3/2}}{\Gamma(\frac{5}{2})} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{(\ln z)^2} + \cdots \right) \\ &= \frac{4\pi g}{3} \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (kT \ln z)^{3/2} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{(\ln z)^2} + \cdots \right). \quad (7.106) \end{aligned}$$

U limesu $z \to \infty$ $(T \to 0)$ korekcioni član jednak je nuli, tako da možemo naći vrednost hemijskog potencijala na nultoj temperaturi

$$\mu_0 = kT \ln z = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{4\pi g V}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (7.107)$$

Da bi odredili zavisnost $\mu(T) = kT \ln z$ na temperaturama različitim od nule $0 < T << \infty$, napišimo (7.106) u obliku

$$1 = \left(\frac{\mu(T)}{\mu_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu(T)}\right)^2 + \cdots \right). \quad (7.108)$$

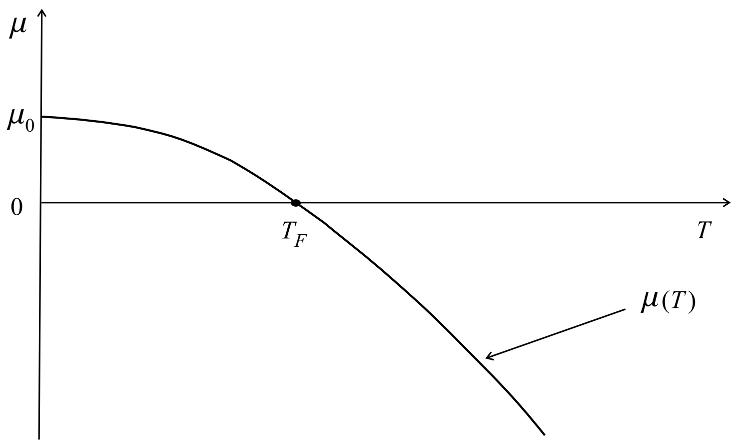
U korekcionom članu možemo staviti $\mu(T) \simeq \mu_0$, a potom poslednji izraz prepisati u obliku

$$\mu(T) = \mu_0 \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 + \cdots \right)^{-2/3}. \quad (7.109)$$

Pošto u niskotemperaturskoj oblasti $kT \ll \mu_0$, izraz u zagradi možemo aproksimirati po formuli $(1+x)^{-2/3} \approx 1 - \frac{2}{3}x$, sledi

$$\mu(T) = \mu_0 \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 + \cdots \right), \quad (7.110)$$

odakle vidimo da je hemijski potencijal na niskim temperaturama pozitivna veličina koja opada sa porastom temperature. Pošto se na jako visokim temperaturama Fermi-Dirac-ove i Bose-Einstein-ove funkcije ponašaju na isti način $G^{-}_n(z) \simeq G^{+}_n(z) \simeq z$ možemo zaključiti da će se i hemijski potencijali ponašati na isti način, tj. po formuli (7.58) koju smo izveli za bozonski sistem, i po kojoj je μ u ovoj oblasti negativna veličina. To znači da na



Slika 7.7: Zavisnost hemijskog potencijala idealnog gasa fermiona od temperature. U blizini apsolutne nule hemijski potencijal je pozitivan i ponaša se u skladu s formulom (7.110), na Fermi-evoj temperaturi je $\mu(T_F) = 0$, a iznad T_F hemijski potencijal je negativan i u asimptotskoj oblasti $T \to \infty$ ponaša se po zakonu (7.58).

nekoj konačnoj temperaturi T_F koja se zove *Fermi-eva temperatura*, hemijski potencijal mora biti jednak nuli $\mu(T_F) = 0$ (Slika 7.7). Iz poslednjeg obrasca nalazimo

$$T_F = \frac{\sqrt{12}}{\pi}\frac{\mu_0}{k} \approx \frac{\mu_0}{k}\,, \tag{7.111}$$

pa se Fermi-eva temperatura obično definiše odnosom $\mu_0 = kT_F$. Dodajmo još da na osnovu veze izmedju hemijskog potencijala i fugaciteta $z = e^{\mu(T)/kT}$, a na bazi ustanovljene zavisnosti $\mu(T)$, možemo zaključiti da je $z(T_F) = 1$ i da u graničnim slučajevima važi: $z \to \infty$ kada $T \to 0$, odnosno $z \to 0$ kada $T \to \infty$.

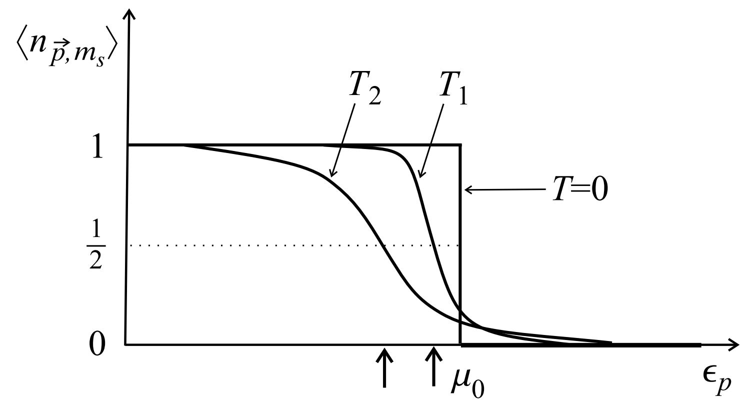
Razmotrimo sada srednje vrednosti brojeva popunjenosti kvantnih stanja na temperaturama $T \ll T_F$. Imajući u vidu da je kvantno stanje fermiona odredjeno impulsom $\vec{p}$ i projekcijom spina m_s, na osnovu formule (6.60) imamo

$$\langle n_{\vec{p},\,m_s}\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu(T))} + 1}\,, \tag{7.112}$$

gde se $\mu(T)$ ponaša po formuli (7.110). Analizirajmo najpre slučaj $T = 0$ kada je $\mu_0 = \mu(0)$, odakle sledi

$$\langle n_{\vec{p},\,m_s}\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu_0)} + 1}\,. \tag{7.113}$$

Iz dobijene formule vidimo da u limesu $T \to 0$ ($\beta \to \infty$) postoji sledeća



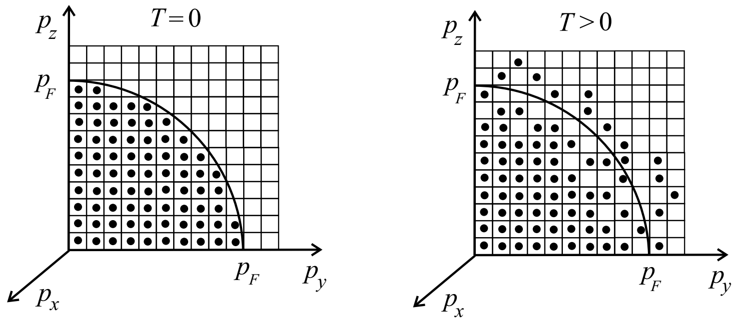
Slika 7.8: Srednje vrednosti brojeva popunjenosti jednočestičnih kvantnih stanja idealnog gasa fermiona na različitim temperaturama. Na $T = 0$ stanja sa energijama ispod Fermi-evog nivoa $\mu_0 = \mu(0)$ su popunjena a ona iznad prazna. Na temperaturama iznad nule $0 < T_1 < T_2$ dolazi do prelaska čestica sa nižih na više energetske nivoe. Strelice na energetskoj osi označavaju vrednosti hemijskih potencijala na tim temperaturama: $\mu(T_1) > \mu(T_2)$. Iz formule (7.112) sledi da za proizvoljno $T > 0$ stanja sa energijom $\varepsilon_p = \mu(T)$ imaju popunjenost $\langle n_{\vec{p},\,m_s}\rangle = 1/2$.

raspodela fermiona po kvantnim stanjima

$$\langle n_{\vec{p},\,m_s}\rangle = \begin{cases} 1 & \varepsilon_p < \mu_0 \\ 0 & \varepsilon_p > \mu_0 \,. \end{cases} \tag{7.114}$$

Dakle nivoi čija je energija manja od μ_0 su popunjeni, a nivoi sa energijom iznad μ_0 nepopunjeni (Slika 7.8). Ova raspodela odgovara tzv. potpuno degenerisanom gasu fermiona, jer se sve čestice poštujući Pauli-ev princip nalaze u jednočestičnim stanjima sa najnižom energijom. Inače za fermionski gas kažemo da je degenerisan ako se nalazi na temperaturama koje su znatno ispod Fermi-eve, pa se T_F naziva i temperatura degeneracije. Iz poslednje formule vidimo da energija koja odgovara popunjenom nivou sa najvećom energijom iznosi $\varepsilon_F = \mu_0$ i zove se *Fermi-eva energija.* U impulsnom prostoru energija ε_F odredjuje Fermi-evu sferu sa poluprečnikom $p_F = \sqrt{2m\mu_0} = h\left(\frac{3N}{4\pi gV}\right)^{\frac{1}{3}}$ unutar koje se nalaze vrhovi vektora koji odredjuju popunjena kvantna stanja (Slika 7.9). U sistemu koji sadrži N fermiona ispod Fermi-evog nivoa nalazi se tačno N popunjenih kvantnih stanja, tako da osnovnom stanju (stanje na $T = 0$) odgovara energija

$$E_0 = \sum_{|\vec{p}|<p_F} \sum_{m_s=-s}^{s} \varepsilon_p = \frac{gV}{h^3}\int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m}\, 4\pi p^2 \,\mathrm{d}p = \frac{2\pi gV}{5mh^3}\, p_F^5 = \frac{3}{5}N\varepsilon_F \,. \tag{7.115}$$



Slika 7.9: Shematski prikaz popunjenosti kvantnih stanja u impulsnom prostoru. Crtež levo prikazuje slučaj $T = 0$ kada su sva stanja unutar Fermi-eve sfere popunjena, a ona van nje prazna. Na $T > 0$ fermioni koji leže ispod Fermi-eve sfere prelaze u stanja iznad Fermi-eve sfere.

Na temperaturama različitim od nule srednje vrednosti brojeva popunjenosti računamo po formuli (7.112), odakle vidimo da će fermioni sa nivoa čija je energija ispod ε_F prelaziti na nivoe čija je energija iznad ε_F. Drugim rečima, nivoi ispod Fermi-evog počeće da se "prazne", a oni iznad počeće da se "pune", i to tako što će fermioni sa nivoa koji su neposredno ispod ε_F, prelaziti na nivoe koji su neposredno iznad ε_F.

7.3.5 Idealni gas fermiona na niskim temperaturama

Na proizvoljnoj temperaturi jednačinu stanja možemo, na osnovu formula (7.93) i (7.94), da izrazimo u implicitnom obliku

$$P = \frac{NkT}{V}\left(\frac{G^-_{\frac{5}{2}}(z)}{G^-_{\frac{3}{2}}(z)}\right) . \tag{7.116}$$

U niskotemperaturskoj oblasti na osnovu formule (7.85) važi

$$G^-_{\frac{5}{2}}(z) = \frac{8}{15\sqrt{\pi}}(\ln z)^{5/2}\left(1 + \frac{5\pi^2}{8}\frac{1}{(\ln z)^2} + \cdots\right) , \tag{7.117}$$

$$G^-_{\frac{3}{2}}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}(\ln z)^{3/2}\left(1 + \frac{\pi^2}{8}\frac{1}{(\ln z)^2} + \cdots\right) , \tag{7.118}$$

pa je

$$P = \frac{2}{5}\frac{N}{V}kT\ln z\left(1 + \frac{5\pi^2}{8}\frac{1}{(\ln z)^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{\pi^2}{8}\frac{1}{(\ln z)^2} + \cdots\right)^{-1} . \tag{7.119}$$

Literatura

[1] Feldman Y. *Statistical Mechanics*, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem 1997 (http://www.aph.huji.ac.il/feldman/statistical.htm).

[2] Feynman R. *Statistical Mechanics: A set of Lectures*, W. A. Benjamin, New York 1972.

[3] Gibbs J.W. *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, Dover Publication, New York 1960 (Reprint of original 1902. edition).

[4] Herbut F. *Kvantna mehanika za istraživače*, Prirodno-matematički Fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 1984.

[5] Hill T.L. *Statistical Mechanics: Principles and Selected Applications*, McGraw-Hill, New York 1956.

[6] Huang K. *Statistical mechanics*, 2nd ed. John Wiley, New York 1987.

[7] Huang K. *Introduction to Statistical Physics*, Taylor & Francis, London 2001.

[8] Isihara A. *Statistical Physics*, Academic Press, New York – London 1971.

[9] Kubo R. *Statistical Mechanics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1968.

[10] Landau L.D. and Lifshitz E.M. *Statistical Physics*, Addison-Wesley 1969.

[11] Milić B. *Statistička Fizika*, Naučna Knjiga, Beograd 1970.

[12] Milić B., Milošević S. i Dobrosavljević Lj. *Zbirka Zadataka iz Teorijske Fizike III deo: Statistička Fizika*, Naučna Knjiga, Beograd 1979.

[13] Milošević S. *Osnovi Fenomenološke Termodinamike*, Privredno-Finansijski Vodič, Beograd 1979.

[14] Mušicki Dj. *Uvod u Teorijsku Fiziku II – Statistička Fizika*, Prirodno-matematički Fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 1984.

[15] Nattermann T. *Statistische Physik*, University of Cologne, Köln 1999 (http://www.thp.uni-koeln.de/natter/data/stat_pdf.zip).

[16] Pathria R.K. *Statistical Mechanics*, 2nd ed. Butterworth-Heinemann, Oxford 1996.

[17] Reichl L. *A Modern Course in Statistical Physics*, 2nd ed. J. Wiley and Sons, New York 1998.

[18] Reif F. *Statistical Physics, Berkeley Physics Course, V5*, McGraw-Hill, New York 1965.

[19] Rumer Yu.B. and Ryvkin M.Sh. *Thermodynamics, Statistical Physics and Kinetics*, Mir Publishers, Moscow 1980.

[20] Stanley H.E. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford 1971.

[21] Tošić B. *Statistička Fizika*, Institut za Fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, Novi Sad 1978.